CAHIER POUR PREPARER SA RENTREE
EN TERMINALE Spécialité MATHEMATIQUES

En septembre, vous entrerez au lycée en terminale générale avec l'enseignement de spécialité mathématiques.
Vous aurez 6h de mathématiques par semaine.
Le programme s'appuie sur l'ensemble des notions vues en première, les approfondit et en développe de nouvelles.
Au milieu du mois de mars, vous passerez l'épreuve écrite de mathématiques (4h, coefficient 16 sur 100), ce qui laisse assez peu de temps pour traiter le programme. Il ne sera pas possible de consacrer des heures à la révision du programme de première.
Après l'épreuve écrite, l'année ne sera pas terminée : il restera certains chapitres à traiter et vous devrez préparer vos deux sujets pour l'épreuve du « Grand Oral », deux questions qui portent sur les deux spécialités choisies en terminale (coefficient 10).
Votre professeur de mathématiques de terminale vous aidera à faire évoluer vos méthodes de travail pour acquérir plus d'autonomie et d'efficacité. Comprendre et mémoriser les méthodes, refaire les exercices chez soi après avoir assimilé le cours constituent une des clés de la réussite, à condition d'être particulièrement concentré et actif en classe.
Ce cahier a été élaboré par des professeurs du lycée Elie Faure de Lormont et du lycée Brémontier de Bordeaux puis remanié par les professeurs du lycée CAMUS. Il est fortement inspiré des travaux de l'IREM de Clermont Ferrand - Groupe Aurillac-Lycée et du livret de liaison du Lycée Louis Bascan (78).
Il s'agit d'un recueil de méthodes et outils portant sur une partie des programmes de seconde et première essentielle pour bien commencer l'année de terminale : Les bases de calcul, la dérivation, la fonction exponentielle et les suites numériques.
Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux et de manière autonome.
Votre professeur de mathématiques pourra vérifier dès la rentrée lors d'une évaluation diagnostique les contenus développés dans ce cahier.
Quelques conseils d'organisation :

- Echelonner votre travail sur une ou deux semaines (4 à 6 exercices par jour), de préférence pendant les semaines qui précèdent la rentrée.
- S'assurer que l'on maîtrise le cours avant de faire les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.
- Faire attention au soin et à la rédaction.
- Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas, allez rouvrir votre cours de première pour y retrouver un exercice du même type.
- Les exercices signalés par des étoiles demandent un peu plus de recherche.

Bon courage à tous et bonnes vacances !

Les professeurs de mathématiques de la spécialité terminale du lycée Camus

I. Les bases de calcul numérique et littéral

Exercice n° 1

Calculer sans calculatrice.

1. $A = \dfrac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}$

2. $B = \dfrac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}}$.

Outils - Calculs avec des radicaux

☛ **Définition**

Pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ est le réel positif dont les carré est a.
Autrement dit, pour tout a positif, $\sqrt{a}^2 = a$.
Attention : pour tout a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

☛ **Produit**

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

☛ **Quotient**

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

la formule ci-contre est valable pour a et b réels **positifs**, et b non nul pour le quotient

Attention :

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$$

Exemples - Opérations avec des radicaux

$A = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{56}}$

On utilise $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$A = \sqrt{\dfrac{14}{56}}$

$A = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

$B = \sqrt{48} + \sqrt{12}$

$B = \sqrt{3 \times 4^2} + \sqrt{3 \times 2^2}$

$B = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$B = 6\sqrt{3}$

On utilise $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Exercice n° 2

Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

1. $C = \sqrt{48}$; **2.** $D = \sqrt{36 + 64}$; **3.** $E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$.

Utilisation de l'expression conjuguée

L'expression conjuguée de $3 + \sqrt{5}$ est $3 - \sqrt{5}$.
On utilise l'expression conjuguée pour écrire un quotient sans radical au dénominateur.

$F = \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}}$

$F = \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}} \times \dfrac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

$F = \dfrac{2 \times (3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})\,(3 - \sqrt{5})}$

$F = \dfrac{2 \times (3 - \sqrt{5})}{3^2 - \sqrt{5}^2}$

$F = \dfrac{2 \times (3 - \sqrt{5})}{4}$

$F = \dfrac{2 \times (3 - \sqrt{5})}{2 \times 2}$

$F = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Exercice n° 3

Ecrire sans radical au dénominateur et simplifier les expressions suivantes.

1. $H = \dfrac{-2}{\sqrt{7} - 2}$; **2.** $I = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$.

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel. factoriser les expressions suivantes :

1. $A = -2 \times (5)^{n+1} + 2 \times (5)^n$; **2.** $B = (n + 1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n$

Exercice n° 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Développer des expressions

Recopie et complète les pointillés.

$A = 2(3x - 1)^2 - (5x + 3)(2 - 3x)$

$A = 2(\cdots x^2 - \cdots + 1) - (10x - \cdots + \cdots - \cdots)$

$A = 18x^2 - \cdots + 2 - 10x + \cdots - \cdots + \cdots$ donc $A = \cdots$

Solution : $A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x)$

$A = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x$ donc $A = 33x^2 - 13x - 4$

Exercice n° 6

En utilisant la même méthode, développe $B = (2x - 9)(3 - 2x) + 5(2x + 1)^2$.

Factoriser des expressions

Exemple 1 :

$A = 6x + 3 + 4(2x+1)^2$

$A = 3(2x+1) + 4(2x+1)(2x+1)$

$A = (2x+1)(3 + 4(2x+1))$

$A = (2x+1)(3+8x+4)$

donc $A = (2x+1)(8x+7)$

Exemple 2 :

$B = 36x^2 - (5x-1)^2$

$B = (6x)^2 - (5x-1)^2$

$B = ((6x) + (5x-1))((6x) - (5x-1))$

$B = (6x + 5x - 1)(6x - 5x + 1)$

donc $B = (11x-1)(x+1)$

Exercice n° 7

Factoriser les expressions suivantes :

$C = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$; $E = (4x-3)^2 - 25x^2$.

Réduire des expressions au même dénominateur.

Recopie et complète les pointillés.

$A = 4 + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{4 \times (\cdots + \cdots)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{\cdots + \cdots}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$ donc $A = \dfrac{\cdots + \cdots}{x+2}$

Solution : Pour tout réel différent de -2, $A = \frac{4(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2}$ $A = \frac{4x+8+3}{x+2}$ donc $A = \frac{4x+11}{x+2}$

Exercice n° 8

En utilisant la même méthode, écris sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5$ $C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$

Les équations

Outils

A la fin de votre année de première, vous savez résoudre quatres type d'équation.

- Les équations linéaires (C'est à dire qui ne comporte aucune puissance de x, ni de fraction comportant des termes en x au dénominateur), il suffit de développer, si besoin, chaque membre de l'équation et d'isoler les différents termes en x d'un même côté de l'égalité.
- Des équations polynomiales (C'est à dire qui comporte des puissances de x qu'il n'est pas possible « d'éliminer » celles-ci par un simple développement),
  - l'expression est factorisable, on se ramène alors à la résolution d'une équation produit.
  - l'expression est du second degré (factorisable ou non).
- Des équations rationnelles (C'est à dire qui comporte des fractions comportant des x au dénominateur). Il conviendra tout d'abord de déterminer l'ensemble des valeurs interdites (celles qui donnent un ou des dénominateurs égaux à 0)
  Puis, il faudra transformer l'écriture de manière à se ramener à l'égalité de deux fractions. On pourra alors utiliser la règle des produits en croix ou la mise au même dénominateur afin de se ramener à l'un des deux cas précédents.

Exemple - Résolution d'une équation linéaire

$$\frac{3}{4}(2x-3) + 3x = 5x - \frac{2}{3}(5-9x)$$

Développer et se ramener à :

$$-\frac{13}{2}x = -\frac{13}{12}$$

Montrer alors que $S = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

Exemple - Résolution d'une équation produit

$$81x^2 - 16 = (9x-4)(2x-3)$$

Reconnaître une identité remarquable, factoriser et se ramener à :

$$(9x-4)(7x+7) = 0$$

Montrer alors que $S = \left\{\frac{4}{9}; -1\right\}$

Solution : Résoudre $81x^2 - 16 = (9x-4)(2x-3)$ équivaut à résoudre $(9x)^2 - 4^2 - (9x-4)(2x-3) = 0$

Or $(9x)^2 - 4^2 - (9x-4)(2x-3) = (9x-4)(9x+4) - (9x-4)(2x-3)$

$= (9x-4)[(9x+4) - (2x-3)]$

$= (9x-4)(7x+7) = 7(9x-4)(x+1)$

Résoudre : $81x^2 - 16 = (9x-4)(2x-3)$ équivaut à résoudre $7(9x-4)(x+1) = 0$

7 est non nul, donc cette équation équivaut à $(9x-4) = 0$ *ou* $(x+1) = 0$ On obtient $S = \{-1; \frac{4}{9}\}$

Exemple - Résolution d'une équation rationnelle

$$x + 1 = \frac{9}{x+1}$$

Déterminer les éventuelles valeurs interdites et se ramener à :

$$(x+1)^2 = 9$$

Montrer alors que $S = \{2; -4\}$

Solution : Pour résoudre une équation avec quotient : on commence par chercher la ou les valeurs interdites, puis l'idée est de se ramener à une équation quotient nul et d'utiliser la propriété :

« Un quotient $\frac{N}{D}$ est nul si et seulement si son numérateur N est nul ET son dénominateur D non nul »

Remarque, on peut aussi utiliser un produit en croix mais cette méthode **n'est pas valable pour résoudre une INEQUATION** quand le signe du dénominateur peut varier

Pour cet exemple : valeur interdite -1

Pour tout réel x différent de -1, résoudre $x + 1 = \frac{9}{x+1}$ équivaut à résoudre $x + 1 - \frac{9}{x+1} = 0$

Or $x + 1 - \frac{9}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} - \frac{9}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 3^2}{x+1} = \frac{(x+1+3)(x+1-3)}{x+1} = \frac{(x+4)(x-2)}{x+1}$

Résoudre $x + 1 = \frac{9}{x+1}$ équivaut donc à résoudre $\frac{(x+4)(x-2)}{x+1} = 0$. On reconnaît une équation quotient nul.

Pour tout réel x différent de -1, ce quotient s'annule si et seulement si son numérateur s'annule.

Il reste à résoudre $(x+4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0$ *ou* $x - 2 = 0$

La valeur interdite ne fait pas partie des solutions donc $S = \{-4; 2\}$

Deuxième exemple résolu : Résoudre $\frac{x^2+x}{x+4} = \frac{16+x}{x+4}$

Solution : valeur interdite -4

Pour tout réel x différent de -4, résoudre $\frac{x^2+x}{x+4} = \frac{16+x}{x+4}$ équivaut à résoudre $\frac{x^2+x}{x+4} - \frac{16+x}{x+4} = 0$

Or $\frac{x^2+x}{x+4} - \frac{16+x}{x+4} = \frac{x^2+x-(16+x)}{x+4} = \frac{x^2+x-16-x}{x+4} = \frac{x^2-16}{x+4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x+4}$

Pour tout réel x différent de -4, $\frac{x^2+x}{x+4} = \frac{16+x}{x+4}$ équivaut à $\frac{(x-4)(x+4)}{x+4} = 0$. On reconnaît une équation quotient nul.

Pour tout réel x différent de -4, ce quotient s'annule si et seulement si son numérateur s'annule.

Il reste à résoudre $(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ *ou* $x + 4 = 0$

Mais -4 est une valeur interdite donc $\boldsymbol{S = \{4\}}$

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x = x + 16$;
2. $(-x-4)(-x+7) = 0$;
3. $9(-3x-1)(6x-36) = 0$;
4. $\frac{-3x-1}{8-5x} = 0$;
5. $\frac{5-8x}{x-2} = 3$.

Exercice n° 10

✷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0$;
2. $(x-1)(2x-7)=4x^2-28x+49$;
3. $x+1=\dfrac{9}{x+1}$;
4. $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$.

Outils - Second degré

Pour tout polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ défini sur $\mathbb{R}$, on appelle discriminant, le réel $\Delta=b^2-4ac$.

- Si le discriminant est négatif, le polynôme f n'admet pas de racine réelle.
- Si le discriminant est nul, le polynôme f admet une unique racine réelle $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si le discriminant est positif, le polynôme f admet deux racines réelles distinctes
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice n° 11

Résoudre les équations suivantes, puis factoriser lorsque c'est possible.

1. $6x^2-15x-9=0$;
2. $\dfrac{1}{8}x^2+x+2=0$;
3. $x^2+x+1=0$.

Exercice n°11 bis

Factoriser $A(x)=x^2+2x-3$, et $B(x)=10x^2+3x-1$

Inéquation du premier degré

Exemple - Résolution d'une inéquation du premier degré

$2x-3 \leqslant 1$	$-5x-4 \leqslant 6$
$2x \leqslant 4$	$-5x \leqslant 10$
$x \leqslant 2$ donc $S=]-\infty;2]$	$x \geqslant -2$ donc $S=[-2;+\infty[$

Exercice n° 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $6x+7>4x+8$;
2. $x+1 \geqslant 9x+25$.

Signe d'un produit

Exemple guidé - Etude du signe d'un produit

On veut étudier le signe dans $\mathbb{R}$ du produit $P(x)=(-2x-6)(x-5)$.
On cherche les valeurs qui annulent chaque facteur. On parle de racine d'une expression.

Racine de $-2x-6$:
$-2x-6=0 \iff \cdots$

Racine de $x-5$:
$x-5=0 \iff \cdots$

On étudie le signe de chaque facteur :

$\cdots$ $\cdots$

On complète le tableau avec les signes qui conviennent.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $-2x-6$			0				
signe de $x-5$					0		
signe de $P(x)$			0		0		

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $P(x)>0$ ou $P(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Exercice n° 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x-8)(-1-10x) \leqslant 0$;
2. $(3x+2)^2-(3x+2)(5x+1) \leqslant 0$.

Exercice n° 14

✷ On considère deux nombres réels x et y dont la somme est 20.
On souhaite que leur produit P soit supérieur ou égal à 91.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que résoudre l'inéquation $P \geqslant 91$ revient à résoudre l'inéquation $(7-x)(13-x) \leqslant 0$.
3. Conclure.

Signe d'un quotient

Exemple guidé

On veut étudier le signe du quotient $Q(x) = \dfrac{3x+9}{x-2}$

Condition d'existence du quotient (autrement dit recherche de la valeur interdite.

$Q(x)$ existe $\iff x - 2 \neq 0 \iff x \neq \cdots$

On a déjà la racine de $x-2$, il nous faut la racine de $3x+9$.

$3x + 9 = 0 \iff x = \cdots$

On détermine le signe de $3x+9$ et de $x-2$.

$\cdots \qquad \cdots$

On complète le tableau avec les signes qui conviennent.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $3x+9$			0				
signe de $x-2$					0		
signe de $Q(x)$			0		‖		

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $Q(x) > 0$ ou $Q(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Deuxième exercice guidé : Résoudre $x \leq \frac{9-x}{x-1}$

Solution : Valeur interdite : 1

Pour tout réel x différent de 1, résoudre $x \leq \frac{9-x}{x-1}$ équivaut à résoudre $x - \frac{9-x}{x-1} \leq 0$

Or $x - \frac{9-x}{x-1} = \frac{x(x-1)-(9-x)}{x-1} = \frac{x^2-x-9+x}{x-1} = \frac{x^2-9}{x-1} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-1}$

Pour tout réel x différent de 1, $x \leq \frac{9-x}{x-1}$ équivaut à résoudre $\frac{(x-3)(x+3)}{x-1} \leq 0$

On fait un tableau de signes avec une ligne pour $x-3$, une pour $x+3$ et une pour $x-1$.

On en déduit l'ensemble des solutions $S =]-\infty; -3] \cup]1; 3]$ Attention, penser à exclure 1 qui est valeur interdite.

Exercice n° 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3}{2x-7} \leqslant 0$;
2. $5 + \dfrac{2}{x+3} \leqslant 0$;
3. $\dfrac{3}{2x-1} \geqslant \dfrac{2}{-3x+15}$;

Signe d'un polynôme du second degré

Exemple guidé

On veut étudier le signe du quotient $R(x) = 4x^2 + x - 3$

On calcule le discriminant : $\Delta = \cdots$.

Ici, Δ est positif et le signe du coefficient en x^2 est ... qui est positif.

On obtient le tableau avec les signes de signe.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
signe de $R(x)$			0				

On peut alors en déduire les solutions des inéquations $R(x) > 0$ ou $R(x) \leqslant 0$ ou tout autre inéquation.

Exercice n° 16

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 5x - 42 \geqslant 0$;
2. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x+5} \leqslant 0$

II. La fonction exponentielle

Outils

La fonction exponentielle est l'unique fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note cette fonction $exp(x)$ ou encore e^x.
Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

- $e^x > 0$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^0 = 1$
- $e^{nx} = (e^x)^n$, pout out $n \in \mathbb{Z}$;
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

En particulier, pour tout réel x, $e^{2x} = e^x \times e^x = (e^x)^2$, à ne pas confondre avec e^{x^2}. On a $(e^3)^2 = e^6$ *et* $e^{3^2} = e^9$

Exercice n° 17

Simplifier les écritures suivantes :

$A(x) = e^{2x-1}e^{-x+1}$; $B(x) = \dfrac{e^{2-x}}{e^{1-2x}}$; $C(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$;

$D(x) = \dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$; $E(x) = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{-x}}$

Exercice n° 18

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 10e^x - 5xe^x$;
2. $B = e^{2x} - 4e^x$;
3. $C = 9e^{2x} - 6e^x + 1$;
4. $D = e^{2x} - 16$.

Outils

La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout a et b dans $\mathbb{R}$,

- $e^a = e^b \iff a = b$;
- $e^a < e^b \iff a < b$.

Exercice n° 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{-3x} = e^{x+1}$;
2. $e^{2x} \leqslant 1$;
3. $e^{-2x} = 0$;
4. $e^x > e$;
5. $e^{x^2} = e^{-5x+6}$;
6. $e^{-x} \leqslant e^x$.

III. Dérivation et applications

Outils

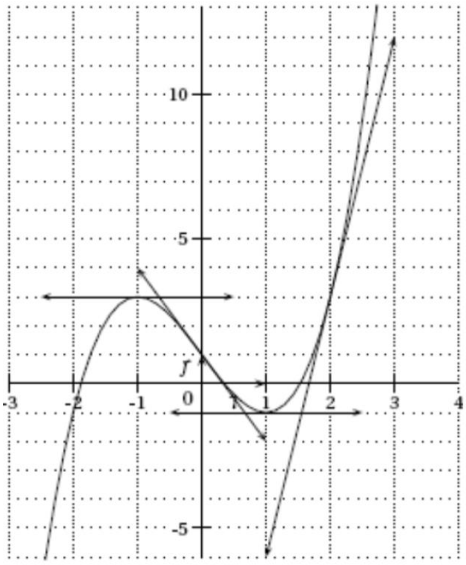
f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
Pour tout $a \in \mathscr{D}_f$

- f est dérivable en a si et seulement si la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, quand h tend vers 0, est un réel.
- Ce réel est appelé nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.
  On a donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Le nombre dérivé de f en a est le coeffcient directeur de la tangene à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Exercice n° 20

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est-elle dérivable en 2 ?

Exercice n° 21



La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :

a. $f(0)$; $f(-1)$ et $f(2)$.

b. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisse 0, -1 et 2.

c. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1.

d. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.

2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1;26)$.

a) Déterminer par le calcul le nombre dérivé $f'(-2)$

b) Déterminer l'équation réduite de la droite T

Exercice n° 22

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur [-3 ;0] ;
- $f(0) = -2$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale ;
- $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;
- $f(3) = 9$.

Exercice n° 23

Pour chacune des fonctions suivantes, donner s'il existe le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Dans cet exercice, calculer le nombre dérivé à l'aide de la formule du taux d'accroissement. On pourra ensuite retrouver le résultat en utilisant les formules des dérivées des fonctions usuelles

1. $f(x) = -x^2$, pour $a = 2$.

2. $f(x) = 2x - 7$, pout tout a dans $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pour $a = 1$.

Outils - Dérivées des fonctions usuelles

fonction f définie par :	Ensemble de définition $\mathscr{D}_f$	fonction dérivée f' définie par	Ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Outils - Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables :

- **Somme de fonctions** : $(u+v)' = u' + v'$
- **Produit de fonctions** : $(u \times v)' = u'v + uv'$
- **Quotient de fonctions** : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- **Composée de u et d'une fonction affine** : Si $g(x) = u(ax+b)$ alors $g'(x) = a \times u'(ax+b)$

Exercice n° 24

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 7$;
2. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$;
3. $f(x) = x^2e^x$;
4. $f(x) = e^{3x+7}$;
5. $f(x) = xe^{-x}$.

Outils

Théorème des variations

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice n° 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 30$.

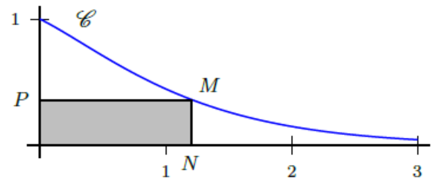
Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n° 26

D'après un exercice du *Livre scolaire*

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau.

Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 3 mètres sur 1 mètre.
Il est modélisé ci-contre dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et l'unité choisie est le mètre.



La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;3]$ par $f(x) = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$.
M est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
N et P sont les projetés orthogonaux du point M sur les axes du repère.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P.
2. Justifier, que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;3]$, l'aire du rectangle $ONMP$ est donnée par $\mathscr{A}(x) = (x^2+x)e^{-\frac{3}{2}x}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.
4. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.

Exercice n° 27

✱ Partie A

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Étudier le signe de $P(x)$.

✱ Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal (en abscisse 1cm pour 1 unité et en ordonnée 1cm pour 2 unités).

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.
2. Dresser son tableau de variations.
3. Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère.
4. Pour quelles abscisses x_0 les tangentes au point d'abscisse x_0 sont-elles horizontales ?
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en $x = 3$ et la tracer dans le même repère que $\mathscr{C}$.
6. Déterminer le réel d tels que $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{d}{x-2}$.
7. On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et Γ sa courbe représentative.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de Γ.

IV. Suites numériques

Exercice n° 28

On considère les 4 algorithmes ci-dessous.

Pour n allant de 0 à 5 faire $u \leftarrow 2^*n-1$ Afficher u Fin pour	$u \leftarrow 2$ Pour n allant de 1 à 5 faire $u \leftarrow 2^*u-1$ Afficher u Fin pour	$n \leftarrow 0$ $u \leftarrow 3$ Tant que $u < 20$ faire $n \leftarrow n+1$ $u \leftarrow 3^*u-5$ Fin Tant que Afficher u	$n \leftarrow 0$ $u \leftarrow 3$ Tant que $u < 20$ faire $n \leftarrow n+1$ $u \leftarrow 3^*u-5$ Fin Tant que Afficher n

1. Combien de valeurs sont affichés par chacun de ces 4 algorithmes ?
2. Faire tourner, à la main, ces 4 algorithmes.
3. Décrire en une phrase ce que fait chacun de ces algorithmes.
4. Dire s'il s'agit de suites définies par une formule explicite ou par une relation de récurrence.

Outils - Suites arithmétiques

- Une suite est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
  r est la raison de la suite.
- Pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$;
- Somme des $n+1$ premiers entiers naturels : $0+1+2+3+\cdots+n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 29

On considère une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{12}.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{12} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

Outils - Suites géométriques

- Une suite est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
  q est la raison de la suite.
- Pour tout n, on a $u_n = u_0 \times q^n$;
- Somme des $n+1$ premieres puissances de q réel différent de 1 :
  $1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice n° 30

On considère une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice n° 31

Un globe-trotter a décidé de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1% tous les jours. On note d_n la distance parcourue durant le n-ième jour ainsi $d_1 = 50$km.

1. Calculer les distances d_2 et d_3.
2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire la nature de la suite (d_n).
3. Exprimer d_n en fonction de n.
4. On note $L_n = d_1 + \cdots + d_n$, ainsi L_n est la distance totale parcourue en n jours.
   Exprimer L_n en fonction de n.
5. Le globe-trotter peut-il réellement parcourir 5000 km ? Justifier.

Exercice n° 32

D'après Manuel *Techmaths Editions Nathan 2019*

Partie A

En 2019 le stock de cabillaud au large des côtes d'un littoral était estimé à 5 000 tonnes.
En raison de la surpêche, ce littoral a vu le stock de cabillaud diminuer sensiblement aux abords des côtes.
Les autorités locales souhaitent réglementer la pêche de cabillaud pour éviter sa disparition totale du littoral.
Elle décident donc de limiter la pêche pour cette espèce.
On suppose que, hors pêche, le stock reste constant à 5 000 tonnes.
En 2019, le quota de cabillaud pouvant être pêché sur ces côtes est fixé à 600 tonnes par an.
Les autorités locales décident de baisser chaque année le quota de pêche de cabillaud de 30 tonnes.

1. Calculer le quota de cabillaud, en tonnes, pouvant être pêché en 2020 puis en 2021.

2. De façon général, on note u_n le quota de cabillaud, en tonnes, pouvant être pêché l'année 2019+n. Préciser la valeur de u_0 et de u_1.

3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

4. Calculer u_{10}. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le tableau suivant est extrait d'une feuille de calculs.

	A	B	C
1	n	Quota annuel (en tonnes) : u_n	Quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2019 (en tonnes)
2	0	600	600
3	1	570	1 170
4	2	540	1 710
5	3	510	2 220
6	4	480	2 700
7	5	450	3 150
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

a. Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, faut-il saisir en B3 afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) ?

b. Quelle formule faut-il saisir en C3, afin d'obtenir, par étirement vers le bas, la quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2019 ?

c. Recopier et compléter le tableau, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.

d. Quelle est la quantité totale de cabillaud, en tonnes, pêchée entre 2019 et 2029 ?

e. La réglementation adoptée permet-elle d'éviter à long terme la disparition du cabillaud des côtes ? Justifier.

Partie B

Une étude montre que le modèle précédent n'est pas valide.
En fait, en l'absence de pêche, le stock de cabillaud augmente de 12% chaque année.
On fixe alors le quota de pêche de cabillaud à 500 tonnes par an.
Soit v_n le stock de cabillaud, en tonnes, pour l'année 2019+n, avant que ne démarre la saison de la pêche.
On a donc $v_0 = 5\ 000$.

1. Démontrer que $v_1 = 5\ 100$ et que $v_2 = 5\ 212$.

2. Calculer v_3.

3. Ecrire une formule de récurrence permettant de calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Saisir n
v ← 5 000
Pour i allant de 1 à n
    v ← 1,12 * v − 500
Fin Pour
Afficher v
```

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de v obtenues à l'aide de l'algorithme, arrondies à l'unité, lorsque l'utilisateur saisit une valeur de n comprise entre 4 et 7.

Valeur de n	4	5	6	7
Valeur de v	5 478	5 635	5 812	6 009

a. Donner la valeur affichée par l'algorithme, arrondies à l'unité, lorsque l'utilisateur saisit la valeur $n = 9$.

b. Interpréter, dans le contexte étudié, la valeur affichée par l'algorithme pour $n = 9$.